التحليل الشعاعي

ليكن لدينا نطاق فراغي A إن كل نقطة من هذا الفراغ تسمى موضع من هذه المنطقة وهذا الموضع يقابله شعاع ينتج عن ذلك

تابع شعاعي فمثلا كلا من السرعة والتسارع هي عبارة عن توابع

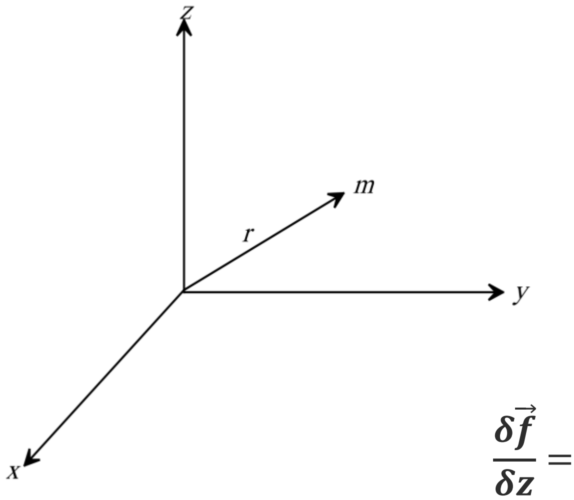
شعاعية للموضع r كما تسمي r وتكتب : $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ وباشتقاق r بالنسبة ل t نحصل على

شعاع السرعة الذي هو : $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$

في دراستنا السابقة : كنا نقابل القيمة العددية u بثلاثة نقاط من الإحداثيات $u(x,y,z)$ أو

إحداثيين $u(x,y)$ أو إحداثي واحد $u(x)$ هذا يعني أن كل نقطة لها قيمة عددية u

إذا أي نقطة يمكن أن يقابلها قيمة عددية يمكن أن يقابلها قيمة شعاعية وتسمى $\vec{F}(x,y,z)$ تابع شعاعي



مثال:

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2yz\vec{\imath} + z^2x\vec{\jmath} + xyz\vec{k}$$

وبالإشتقاق الجزئي علىx نحصل على:

$$\frac{\delta\vec{f}}{\delta x} = 2xyz\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + yz\vec{k}$$

و بالاشتقاق الجزئي علىz $\frac{\delta\vec{f}}{\delta z} = 2xy\vec{\imath} + 2z$

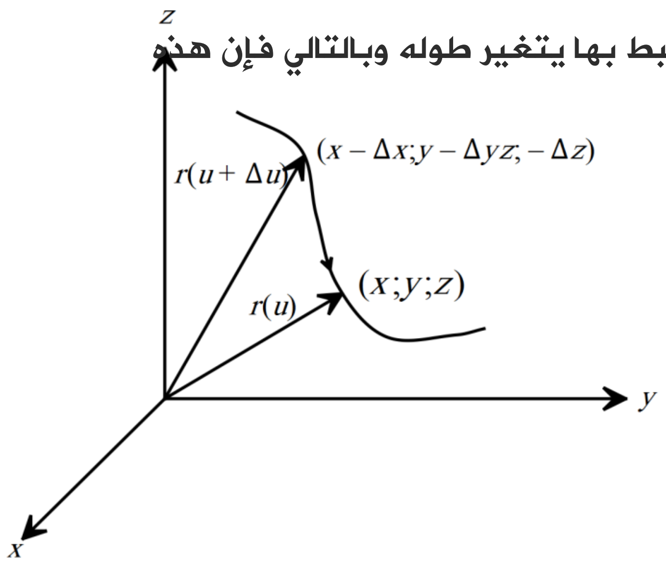
$$\frac{\delta 2\vec{f}}{\delta z^2} = 2\vec{j}$$

السطوح المستوية:

نقول عن السطح $u = c = u(x, y, z)$ سويا وهو عبارة عن معادلة سطح في الفراغ التي من أجلها يكون التابع **u** يساوي قيمة ثابتة فمثال على ذلك الكمون الكهربائي الذي تكون من أجله الشحنات التي لها كمون واحد بسطح نسميه سطح تساوي الكمون.

أنواع الاشتقاق الاتجاهي(الشعاعي):

عندما تتحرك نقطة في الفراغ فإن شعاع الموضع **r** المرتبط بها يتغير طوله وبالتالي فإن هذه النقطة ترسم منحنيا كما في الشكل:



إنا التغير الطفيف ل **r** هو عبارة عن $\Delta \mathbf{r}$

وهذا التغير إذا ربطناه ب **u** فإن:

$$(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)\Delta\vec{r} = \vec{r}(u + \Delta u) - \vec{r}(u)$$

$$\frac{\vec{r}(u + \Delta u) - \vec{r}(u)}{\Delta u} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta u}$$

$$lim_{\Delta u \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta u}\right) = \frac{d\vec{r}}{du}$$

وبالإسقاط على المحاور: $\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dx}{du}\vec{i} + \frac{dy}{du}\vec{j} + \frac{dz}{du}\vec{k}$

مثال: أوجد الاشتقاق الاتجاهي للتابع :

$$\mathbf{u = x^2y + z^2y^2 + xy + y}$$

في النقطة $M(1,2,-1)$

$$\left[\frac{\delta u}{\delta x}\right]_M = 2xy + y = 6$$

$$\left[\frac{\delta u}{\delta y}\right]_M = x^2 + 2yz^2 + x + 1 = 7$$

$$\left[\frac{\delta u}{\delta z}\right]_M = 2y^2z = -8$$

ملاحظة:

إن المشتق بالإحداثيات المستوية **xoy** يمثل مماس لمنحني في المستوي أما المشتق بالإحداثيات الثلاثية الفراغية فإن المشتق يمكن أن يأخذ مناحي كثيرة .

المشتق الأعظمي (التدرجي):

ليكن لدينا **u** تابع عددي للموضع **(x,y,z)** المتوضع على سطح سوية ما إن معدل تغير **u** يمكن أن يأخذ اتجاهات كثيرة ومختلفة ولكن في نقطة على هذا السطح إذا كان متجها باتجاه الناظم على هذا السطح عندئذ فإن هذا المشتق يكون أعظميا ونسميه **f**تدرج التابع **u**

وتكتب: $\frac{\delta u}{\delta n}.\vec{n}$ في النقطة **n** أي أن التدرج هو شعاع محمول على الناظم لسطح السوية بشكل آخر

تعريف: نسمي التابع الشعاع: $u: r^3 \to r^3$

$$(x, y, z) \to \left(\frac{\delta u}{\delta x}, \frac{du}{\delta y}, \frac{\delta u}{\delta z}\right)$$

تدرج التابع العددي **u** ويرمز له بالرمز: $\overrightarrow{grad}.u = \frac{\delta u}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta u}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta u}{\delta z}\vec{k}$

ملاحظة:إن الشعاع لا يمتد ل **u** حيث أن **u**مقدار عددي

كما نلاحظ أن **u** تابع للموضع هذا يعني أن شعاع التدرج يتجه باتجاه تزايد التابع **u** وهو محمول على الناظم ويدخل على التوابع العددية

وأن قياس التدرج هو : $\left|gra\vec{d}.u\right| = \sqrt{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2}$

العامل نبلا (مؤثر هاملتون)(∇)

نسمي نبلا (∇)مؤثر اشتقاقي وموجه يؤثر على التوابع العددية وعلى التوابع الشعاعية للموضع

وبالنسبة للتوابع العددية فهو يشتقها ويوجهها بآن واحد ويرمز له بالرمز :

$$\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta}{\delta z}\vec{k}$$

وأن تأثير نبلا على تابع عددي **u** للموضع يعطينا تدرج تابع **u** :

$$gra\vec{d}.u = \vec{\nabla}.u = \frac{\delta u}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta u}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta u}{\delta z}\vec{k}$$

وهو محمول على الناظم :

$$gra\vec{d}.u = \frac{du}{dr}.\vec{n}$$

مثال: أوجد القيمة العظمى للمشتق للتابع : $f(x,y,z) = x^2yz^3$ في النقطة

$M(1,-1,1)$

الحل:

نقوم باشتقاق **f** ثلاث مرات (مرة بالنسبة ل **x** ومرة بالنسبة ل **y** وأخرى بالنسبة ل **z**)

$$\vec{\nabla}.f = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\,\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}.f = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\left|\vec{\nabla}.f\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

ملاحظة نتعامل مع ∇ كما نتعامل مع أي شعاع

تعريف شعاع التوجيه $\vec{r}$:

نعرف $r^\wedge$ بأنه الشعاع نفسه على طويلته $r^\wedge = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

لأن $\vec{r}$ منطبق على $r^\wedge$ أي أن الزاوية بينهما تساوي الصفر و إن $COS\,(0) = 1$ فإذا حسبنا مثلا $\nabla r^2 = 2rr^\wedge = 2\,\vec{r}$ حيث أننا نشتق r و نوجهه بالشعاع $r^\wedge$

إن الجدول التالي هام جدا جدا ويتوجب حفظه

$\vec{r} = r\ .\ r^\wedge$	$\vec{\imath}\,.\,\vec{\imath} = \vec{\jmath}\ .\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$
$r = \vec{r}.\ \ r^\wedge$	$\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}$
$\vec{\nabla}\ .\ r = r^\wedge$	$\vec{\imath}\wedge\vec{k} = \vec{\jmath}$
$r^\wedge\wedge\ \vec{r} = 0$	$\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath}$
$\vec{\nabla}\ \wedge\ \vec{r} = 0$	$\vec{\imath}\ .\vec{\jmath} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{\jmath}\|COS(\frac{\pi}{2}) = 0$
$\vec{\nabla}\ .\ \vec{r} = 3$	$\vec{\imath}\ .\vec{k} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{k}\|COS(\frac{\pi}{2}) = 0$

العلاقة بين تدرج تابع وتفاضله:

ليكن لدينا $u = (x, y, z)$ نعلم ان التفاضل التام لـu

$$d(u) = \frac{\delta u}{\delta x}\,d(x) + \frac{\delta u}{\delta y}\,d(y) + \frac{\delta u}{\delta z}d(z)$$

فإذا أخذنا

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \implies d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}u = \frac{\delta u}{\delta x}\,\vec{\imath} + \frac{\delta u}{\delta y}\vec{\jmath} = \frac{\delta u}{\delta z}\vec{k}$$

و هي علاقة التفاضل التام للتدرج $d(\vec{r})\ \vec{\nabla}u = \frac{\delta u}{\delta x}\,d(x) + \frac{\delta u}{\delta y}\,d(y) + \frac{\delta u}{\delta z}d(z)$.

نتيجة: $\vec{\nabla}.u \neq u.\vec{\nabla}$

العلاقة ليست تبديلية:

التفرق(div):

إذا اثر ∇ على تابع شعاعي للموضع $\vec{f}(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{f} = di\vec{v}.\vec{f}$$

نفرق شعاع ويساوي مجموع المشتقات الجزئية للموضع $\vec{f}$

$$di\vec{v}.\vec{f} = \frac{\delta f(x)}{\delta x} + \frac{\delta f(y)}{\delta y} = \frac{\delta f(z)}{\delta z}$$

إن ناتج التفريق عبارة عن قيمة عددية و ليست شعاعية

مثال احسب تفرق F

$$\vec{f} = x^2yz\vec{i} - xy\vec{j} + z^3\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{f} = 2xyz - x + 3z^2$$

مثال(2):

$$\vec{f} = x^2yz\vec{i} - xy^2z\vec{j} + xy\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{f} = 2\mathrm{xyz} - 2\mathrm{xzy} + 0 = 0$$

تعريف: نسمي الشعاع الذي تفرقه معدوم بالشعاع اللولبي $\vec{\nabla}.\vec{f} = 0 \Leftrightarrow \vec{f}$ لولبي

ويمكن برهان الخواص التالية:

1. اذا أدخلنا $\vec{\nabla}$ على تابعين أحدهما شعاعي و الأخر عددي فإن:

$$\vec{\nabla}(\mathrm{u}, \vec{\mathrm{f}}) = (\vec{\nabla}.u)\vec{f} + u(\vec{\nabla}\vec{f})$$

$$2)\vec{\nabla}.\vec{r} = 3$$

$$\vec{\nabla}.\vec{r}=\frac{\delta x}{\delta x}+\frac{\delta y}{\delta y}+\frac{\delta z}{\delta z}=1+1+1=3$$

3) نعرف تابع دوراني بأنه $rot\vec{t}.\vec{f}=\vec{\nabla}\wedge\vec{f}$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\delta}{\delta x}&\frac{\delta}{\delta y}&\frac{\delta}{\delta z}\\ f(x)&f(y)&f(z)\end{vmatrix}$$

مثال(1): $\vec{f}=x^2y\vec{i}+y^2z\vec{j}+z^2x\vec{k}$

احسب دوران الحقل f

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\delta}{\delta x}&\frac{\delta}{\delta y}&\frac{\delta}{\delta z}\\ x^2y&y^2z&z^2x\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{f}=-y^2\vec{i}-z^2\vec{j}-x^2\vec{k}$$

مثال(2):

$$\vec{f}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

احسب دوران الحقل f

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\delta}{\delta x}&\frac{\delta}{\delta y}&\frac{\delta}{\delta z}\\ x&y&z\end{vmatrix}=0$$

ومنه نستنتج الخاصة التالية بأن $\vec{f}$ كموني

$$4)\ \vec{\nabla}\wedge\vec{f}=0\Leftrightarrow\vec{f}\ \text{كموني}$$

5) كل تابع كموني يمكن أن يكتب تدرج تابع عددي

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{f}=0\Leftrightarrow\vec{f}=\vec{\nabla}.u$$

$$\vec{\nabla}\wedge(u,\vec{f})=(\vec{\nabla}.u)\wedge\vec{f}+u(\vec{\nabla}\wedge\vec{f})$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{f_1},\vec{f_2})=(\vec{\nabla}\wedge\vec{f_1}).\vec{f_2}-(\vec{\nabla}\wedge\vec{f_2}).\vec{f_1}$$